Pedagogika, roč. 67, č. 2, 2017, s. 161–176
http://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/

Úvod do aproximálního numerického systému[1]

Michala Plassová, Iva Stuchlíková, Michal Vavrečka

Abstrakt: *V následující přehledové studii se snažíme shrnout základní poznatky o aproximálním numerickém systému (ANS) u člověka. V úvodu se věnujeme vymezení ANS, popisujeme jeho základní principy, mechanismy a neuroanatomickou lokalizaci systému. V další části studie identifikujeme průnik kognitivních funkcí ANS se základními kognitivními funkcemi, jež jsou nutné pro úspěšné zvládnutí školní i předškolní matematiky. Zaměřujeme se primárně na vzájemný vztah mezi ANS a matematickými schopnostmi a prostor věnujeme i kontroverzi, která v současné chvíli panuje v otázkách metodologického uchopení tohoto vztahu. V textu dále uvádíme poznatky z aktuálních studií, jež se pokoušejí o trénink ANS s cílem pozitivně působit na obecné matematické schopnosti. Poslední část patří možnostem využití ANS v pedagogické praxi, včetně zdůraznění klíčových mechanismů pro efektivní zařazení do praktické výuky.*

Klíčová slova: *aproximální numerický systém, matematické nadání, neuropsychologie, intraparietální sulkus, kognice.*

Úvod

Aproximální numerický systém (ANS) je v literatuře (např. Gallistel & Gelman, 2000; Feigenson, Dehaene & Spelke, 2004) zpravidla vymezen jako hrubá mentální reprezentace čísla. Označován bývá (např. Dehaene, 1999; Feigensonet al., 2004; Park & Brannon, 2013) i jako systém hrubého matematického odhadu a hrubého výpočtu. Jde o kognitivní systém, jehož silná stránka spočívá zejména v rychlosti odhadu. Ten probíhá v rámci desetin vteřiny a u dospělého člověka poskytuje relativně vysokou přesnost (Sousa, 2010). Než se ale budeme věnovat užšímu vymezení ANS, jeho ontologickým principům a následně teoretickým neshodám, které panují zejména v otázkách struktury a diagnostické hodnoty ANS, shrňme pro začátek obecné neuropsychologické poznatky, které máme o matematice.

Zájem odborníků o porozumění neurálním korelátům matematických schopností není v literatuře novým tématem, naopak první studie zabývající se spojitostí

[1] Tento článek vznikl za podpory Grantové agentury Jihočeské univerzity v rámci grantového projektu 112/2015/S.

DOI: 10.14712/23362189.2017.410

mezi patologickým poškozením nervové soustavy a dopady na matematické funkce lze datovat do počátku 20. století. V roce 1908 Lewandowsky a Stadelman publikovali vůbec první report o selektivním narušení matematických schopností v důsledku traumatického poranění hlavy a z něho plynoucího lokálního poškození mozku. Konkrétně šlo o případ mladého muže, který utrpěl traumatické poranění levého okcipitálního laloku. Jazykové schopnosti mladíka zůstaly téměř beze změny, nicméně matematické kompetence vykazovaly výrazný deficit. Zhruba o dvě dekády později pak Henschen (1920) poprvé použil termín „akalkulie“, aby pojmenoval pokles kognitivní kapacity pro počítání v důsledku poškození mozku úrazem nebo v důsledku nemoci (např. mozková příhoda). Henschen studoval skupinu dospělých pacientů, kteří v důsledku různých typů poškození mozku nebyli schopni matematických výpočtů. Na základě identifikace té části mozku, kterou měli poškozenou všichni tito pacienti, Heschen potíže s počítáním umístil do oblasti angulárního gyru.

Na začátku nového století Dehaene (2011) umístil obecné matematické schopnosti v mozku do oblasti, která leží za centrální brázdou – do parietálního (temenního) laloku. Přesněji řečeno se zde nachází centrum pro tu část matematických schopností, kterou označujeme jako aritmetika. V oblasti parietálního laloku, specificky intraparietální brázdy bylo identifikováno centrum numerických reprezentací, které je v literatuře spojováno právě s ANS (např. Dehaene et al., 2003; Piazza et al., 2004; Cantlon et al., 2006; Cohen Kadosh et al., 2008; Knops et al., 2009; Piazza et al., 2010). V následujícím textu se tudíž soustředíme zejména na tuto neuroanatomickou oblast.

Aproximální numerický systém

Odborná literatura (např. Dehaene, 1999; Brannon, 2006; Piazza et al., 2010; Merritt, DeWind & Brannon, 2012; Haist et al., 2015) na kardinální vlastnosti ANS nahlíží relativně jednotně. První vlastnost spočívá v aktivitě ANS při pozorování množin o více než čtyřech prvcích (Kaufman et al., 1949). Druhá pak v senzitivitě ANS vůči tzv. numerickému rozsahu (např. Piazza et al., 2010; Haist et al., 2015). Numerickým rozsahem se rozumí absolutní rozdíl mezi dvěma kontrastními množinami. Dalším obecně přijímaným rysem ANS, který je v literatuře uváděn, je jeho vrozená povaha (Brannon, 2006; Piazza et al., 2004; Merritt et al., 2012). Na úvod si tak stručně zmiňme, jak se k problému vrozených matematických schopností staví vývojová psychologie a potažmo současná didaktika matematiky.

Jean Piaget (1954) ve své knize, která shrnuje vývoj numerické kognice u dětí, píše, že děti získávají spolehlivou mentální reprezentaci čísla až kolem 6 nebo 7 let věku. V průběhu kojenecké a batolecí fáze nejsou děti podle Piageta schopné posuzovat velikost množin nebo odhadovat velikost objektů. Piagetovu teorii v tomto ohledu vyvrátila průkopnická práce Gelmana a Gallistela (1978), která popsala, že i předškolní děti mají intuitivní znalosti aritmetiky. Později toto zjištění rozšířili Xu a Spelke (2000), kteří prokázali, že šestiměsíční děti (N=16) jsou schopné vizuálně rozlišovat mezi malými množinami objektů s poměrem 8 vs. 16 teček. Kojenci však nedokázali rozlišovat mezi množinami o poměru 8 vs. 12 teček. To autory přivedlo ke dvěma závěrům: prvně se zdá, že se diferenciace systému hrubého odhadu řídí Weberovým–Fechnerovým zákonem, který tvrdí, že intenzita smyslového vjemu je logaritmicky závislá na intenzitě fyzikálního podnětu, a dále, že se funkce hrubého matematické odhadu ontogeneticky vyvíjí a zpřesňují.

V praxi se pak setkáváme s tím, že didaktika matematiky (např. Binterová & Hošpesová, 2003; Binterová et al., 2005; Samková, 2013) klade důraz na trénink matematického odhadu. Odhadují se počty prvků v množině, výsledky početních operací nebo metrické vlastnosti geometrických tvarů (Samková, 2013). Nicméně se hodí zdůraznit, že aktivita mozku se během těchto odhadů liší. Je to zpravidla dáno tím, že je pro odhad větší množství času, než je tomu u tréninku ANS, a zapojuje se tak i vyšší kognice. Více se tomuto jevu budeme věnovat v následujícím textu. Nyní se blíže podívejme na výzkum vrozených matematických schopností.

Objevují se studie (např. Dehaene, 1999; Brannon, 2006; Merrittet al., 2012), které dokazují, že základní numerické schopnosti nejsou závislé na vzdělání, a dokonce ani na jazyku, ale jsou biologicky zakořeněné. Základní numerické kompetence lze nalézt bez rozdílu rasy, pohlaví, věku nebo kulturní příslušnosti v mozku všech lidí a také napříč rozmanitou škálou živočišných druhů. Komparativním psychologům (Brannon & Terrace, 1998; Davis & Perusse, 1988; Hauser, Carey & Hauser, 2000; Wilson, Hauser & Wrangham, 2001; Nieder & Dehaene, 2009) se podařilo prokázat, že zvířata dokážou rozlišit mohutnost množiny a zcela běžně využívají numerické informace při rozhodování.

Odhalení vrozené povahy numerických kompetencí je věcí relativně nedávnou. Významný milník představoval objev základních numerických schopností u kojenců (Starkey & Cooper, 1980; Feigenson et al., 2004; Izard et al., 2009). Následné výzkumy (Dehaene,1999; Wynn, 1992; Feigenson et al., 2004; Brannon, 2006) ukázaly, že děti jsou ve věku pouhých pěti měsíců schopné rudimentálních aritmetických početních operací, jako je sčítání a odčítání u malého počtu objektů. Antropologické studie (Gordon, 2004) prokázaly schopnost kvantifikovat objekty u dospělých lidí z izolovaných domorodých kmenů, kde numerické symboly nebyly součástí jejich kultury.

Výše uvedené studie přivedly odbornou veřejnost (např. Halberda, Mazzocco & Feigenson, 2008) k hypotéze, že jde o mechanismy, které mají fylogenetické i ontogenetické základy. V současnosti (např. Castelli, Glaser & Butterworth, 2006; Piazza et al., 2006; Izard et al., 2008; Piazza et al., 2010) je patrný trend tyto vrozené neurální mechanismy zmapovat. Dostáváme se tak konečně k vysvětlení neverbálního numerického mechanismu označovaného jako aproximální numerický systém (ANS). Bližší charakteristika ANS bývá, jak jsme již uvedli, nejčastěji popisována jako hrubá vnitřní reprezentace čísla (Gallistel & Gelman, 2000; Feigenson et al., 2004), která není závislá na jazyku nebo symbolické matematice (Xu & Spelke, 2000; Gordon, 2004; McCrink & Wynn, 2007; Spaepen et al., 2011). Existují přesvědčivé důkazy (Feigenson et al., 2004; Halberda et al., 2008; Gilmore, McCarthy & Spelke, 2007; Mazzocco, Feigenson & Halberda, 2011b; Piazza et al., 2010; DeWind & Brannon, 2012; Park & Brannon, 2014) o tom, že jde o klíčový systém tvořící základy symbolických matematických dovedností u dospělých lidí. K vysvětlení tohoto tvrzení je potřeba blíže rozebrat samotnou podstatu ANS. Podle Haista (Haist et al., 2015) je potřeba při pochopení ANS brát v potaz jeho dvě základní složky. Ty pramení z principů ANS, jež jsme uvedli v úvodu kapitoly. Nyní se na ně podíváme podrobněji.

První složku ANS, kterou lze pojmenovat jako aproximativní aritmetiku, můžeme nejspolehlivěji pozorovat ve chvíli, kdy odhadujeme počet množiny. Množina musí mít více než čtyři prvky, má-li menší počet prvků, pak jsou v mozku aktivovány jiné korové oblasti.

V literatuře (např. Hyde, 2011) se hovoří o tzv. paralelním systému individualizace (angl. též „object tracking system“), který je určen právě pro posuzování magnitudy množin o velikosti nižší než čtyři prvky. První složka ANS hraje důležitou roli pro vývoj složitějších matematických operací, konkrétně sčítání a odčítání.

Druhou složkou je senzitivita ANS vůči numerické vzdálenosti rozsahu. Numerickou vzdáleností se rozumí absolutní rozdíl mezi dvěma kontrastními množinami (například reakční čas je kratší a přesnost vyšší, když posuzuji, zda je více 12 modrých teček oproti 3 žlutým, než když posuzuji, zda je více 6 modrých teček oproti 3 žlutým) (Haist et al., 2015). Podle některých autorů (Halberda et al., 2008; DeWind & Brannon, 2012; Roitman Brannon & Platt, 2012) se preciznost odhadu a reakční čas při zapojení ANS řídí již zmíněným Weberovým–Fechnerovým zákonem. Použijeme-li opět příklad se žlutými a modrými tečkami, pak by se Weberův–Fechnerův zákon manifestoval tak, že čím větší početní rozdíl mezi žlutými a modrými tečkami, tím rychlejší reakční čas a vyšší přesnost. Někteří autoři (např. Sasanguie, Defever et al., 2013; Sasanguie, Gobel et al., 2013; Tibber et al., 2013; Park & Brannon, 2014) toto tvrzení popírají a argumentují tím, že na každou studii, která logaritmický vztah potvrzuje (např. Gilmore et al., 2010; Piazza et al., 2010, Mazzocco et al., 2011a, 2011b; DeWind & Brannon, 2012; Halberda et al., 2008; Libertus, Odic & Halberda, 2012), existuje podobný počet studií (např. Holloway & Ansari, 2009; Inglis et al., 2011; Castronovo & Gobel, 2012; Fuhs & McNeil, 2013; Gobel et al., 2014), které ho vyvrací. Z tohoto důvodu zaujímáme vůči Weberovu–Fechnerovu zákonu v oblasti ANS spíše skeptický postoj a domníváme se, že je pro posouzení preciznosti a rychlosti ANS potřeba navrhnout spolehlivý nástroj. Shrneme-li konečně zmíněné funkce ANS, pak můžeme konstatovat, že jsou základem pro vývoj jednoduché aritmetiky, a to zejména ve smyslu vytvoření mentální reprezentace pro sčítání, odčítání, dělení a násobení.

Neuroanatomie ANS

Již v úvodu jsme se zmínili, že zájem o výzkum neuroanatomických korelátů numerických mechanismů není záležitostí poslední doby a průkopnické práce (Henschen, 1919; Gerstmann, 1940; Luria, 1973) lze datovat na začátek dvacátého století. Tyto případové studie získávaly data o neurálních numerických mechanismech na základě studia lidí s poškozením mozku. První funkčně neurozobrazovací studie aritmetických funkcí publikovali autoři až v závěrečných dvou dekádách dvacátého století (např. Dehaene & Changeux, 1996). Dehaene (2011) píše, že byl učiněn pozoruhodný pokrok ve zmapování behaviorálních kompetencí příslušných oblastí mozku a jednotlivých neuronů zaštiťujících specifické prostorové, temporální a numerické úlohy. Přitom však dodává, že tato doména zůstává stále systematicky neprozkoumána.

Předěl ve výzkumu představuje identifikace centra numerických reprezentací v oblasti intraparietální brázdy (intraparietální sulkus – IPS) (Dehaene et al., 2003; Cohen Kadosh et al., 2008) ohraničený inferiorním (IPL) a superiorním (SPL) parietálním lobem (Dehaene et al., 2003; Dehaene, 2011; Nieder, 2013). Jak struktura (Isaacs et al., 2001; Rotzer et al., 2008; Rykhlevskaia et al., 2009), tak neurální aktivita (Price et al., 2007; Kaufmann et al., 2009; Rotzer et al., 2009; Mussolin et al., 2010) této oblasti odráží interindividuální rozdíly v matematických dovednostech.

Oblasti IPS jsou konzistentně aktivovány, kdykoli provádíme jednoduché aritmetické operace, jako jsou sčítání, odčítání nebo násobení (Chochon et al., 1999; Pinel et al., 2001; Nieder, 2013). IPS je dokonce aktivováno i v případě, že se mezi shlukem písmen vyskytne arabská číslice (Eger et al., 2003). Intraparietální oblast je asociována s abstraktní reprezentací čísla, přičemž tato abstrakce není kulturně vázána. Může jít o naučené symboly, jako jsou kupříkladu arabské číslice nebo čísla jednoduše vyslovená či vyhláskovaná (tamtéž). Aktivace IPS byla potvrzena i za přítomnosti nesymbolického vyjádření čísla, jako jsou různě velké množiny teček (Piazza et al., 2004; Castelli et al., 2006).

Soustřeďme se nyní na podobu neurální aktivace po prezentaci numerického symbolu nebo nesymbolického čísla. Existují studie (např. Cantlon et al., 2006; Izard et al., 2008; Nieder & Dehaene, 2009), které zjistily zajímavou anatomickou specializaci mozku. Ve chvíli, kdy člověku prezentujeme numerický symbol, najdeme aktivaci v pravé části parietálního kortexu. Prezentujeme-li objekt (např. skupinu teček), najdeme aktivaci v oblasti okcipitálně-temporálního gyru. Zajímavé je, že tato oblast reaguje i na změny objektu (např. zmizení několika teček z množiny) a oblast v pravé části parietálního kortexu reaguje na změny v číselných setech (kupříkladu ze setu 666 na 696).

Stejný jev pozorovali Izard a kol. (2008) už u tříměsíčních dětí (N=36) ve studii, kterou jsme zmiňovali v úvodu článku. Izard kojencům prezentoval vizuální stimuly v podobě žlutých kachniček a červených kočiček. Následnou analýzou mozkové aktivity měřené pomocí elektroencefalografu (EEG) prokázal, že kojenci reagují na změny v počtu prvků aktivitou dorzálního systému a bilaterální aktivací intraparietálních oblastí. Na změnu v identitě objektu pak kojenci reagovali aktivitou ve ventrálním proudu. Autor uvádí, že povaha aktivace mozku kojenců jasně ukazovala na vrozenou funkční specializaci těchto oblastí. Zároveň při srovnání se studií Cantlona a kol. (2006), který používal stejné vizuální stimuly u čtyřletých dětí (N=8) a skupiny dospělých lidí (N=20), vykazovala mozková aktivita naměřená pomocí funkční magnetické rezonance jasné vývojové zlepšení.

Haist a kol. (2015) také hovoří o vývojové trajektorii zapojování IPS, potažmo ANS. V rámci funkční magnetické rezonance studie porovnávali mozkovou aktivitu při určování velikosti a porovnávání nečíselných množin. Výzkumný úkol měl podobu dvou množin teček – žlutých a modrých. Tečky byly probandům prezentovány po dobu 2500 ms a proband měl následně určit, kterých teček bylo více. Šlo tedy o funkci ANS, kterou jsme si pojmenovali jako senzitivita vůči numerickému rozsahu.

Výsledky ukázaly, že nejlépe si vedli dospělí probandi (N=16), poté adolescenti ve věku od 13 do 17 let (N=16) a až na konci se umístily děti od 6 do 12 let (N=14). Z analýzy mozkové aktivity vyplynulo, že dospělý člověk při řešení úlohy zapojoval ANS častěji, a to s nižším počtem chyb a rychlejším reakčním časem než děti či adolescenti.

Tyto výsledky se zdají být v určitém rozporu s přímou podstatou ANS, tj. děti, které neovládají symbolickou matematiku, by neverbální matematické kompetence naopak využívat měly, a to více než dospělí. Racionálním vysvětlením se zdá být anatomické zrání oblasti IPS a ontogenetický vývoj ANS. Sousa (2010) zjistil, že s dospíváním se preciznost ANS zvyšuje a v dospělosti dosahuje 15 %, což znamená, že dospělý člověk dokáže bez počítání rozlišit mezi množinou o 85 prvcích a množinou o 100 prvcích. Je pravděpodobné, že použití ANS si od dítěte žádá větší mentální úsilí než u dospělého, alespoň to naznačuje prodloužení reakčních časů. V kombinaci s nižší spolehlivostí by bylo logické, kdyby dítě hledalo jinou strategii. Existují hypotézy (Haist et al., 2015), že je u dětí přítomný jiný neverbální numerický systém. Libertus a kol. (2013) ve své studii publikují data naznačující, že svou roli hrají i primitivní vizuální strategie. Konečně také nesmíme opomenout možnost nesprávného metodologického přístupu při získávání dat.

Sami se přikláníme k tomu, že oním dalším neverbálním numerickým systémem je již zmíněný paralelní systém individualizace. Důvodem jsou zjištění z našeho pilotního výzkumu (Plassová et al., 2016), kde se i přes nízký počet probandů (N=12) projevil zajímavý jev. V našem výzkumu předškolní děti ve věku od 5 do 6 let porovnávaly množiny teček o různém poměru. Zároveň byla zaznamenávána mozková aktivita pomocí EEG. Úkolem bylo, aby děti určily, která množina je větší a která menší. Při náročných úlohách, kdy se prezentované množiny lišily jen malým množstvím teček (poměr byl kupříkladu 40 ku 60 tečkám) byla patrná spojitost s vysokou mírou aktivity mozku v oblasti IPS. U jednoduchých úloh jsme pak našli mozkovou aktivitu v oblastech ventrální části temporálního laloku, která souvisí s vizuálním zpracováním (Schacter et al., 2010). Zdá se tedy, že svou roli hraje i hustota a struktura vizuálního pole. V případě, kdy je úlohu možné vizuálně shlukovat (např. místo bílé a černé množiny teček vidíme tři bílé a dva černé shluky teček), je aktivní ventrální systém. V případě, že je úloha vizuálně členitější, je aktivní IPS. Se stejným závěrem přišli i Piazza a kol. (2010) a Hyde (2011). Autoři zároveň tvrdí, že aktivita ve ventrálním systému není přídavným systémem ANS, ale že jde o paralelní systém individualizace, což dále potvrzuje naši hypotézu. Dehaene, Izard a Piazza (2005) vytvořili protokol pro kontrolu tvorby vizuálních stimulů v oblasti numerické kognice a mezi kontrolované položky řadí luminanci, obsazenou plochu, velikost objektu a volný prostor mezi objekty.

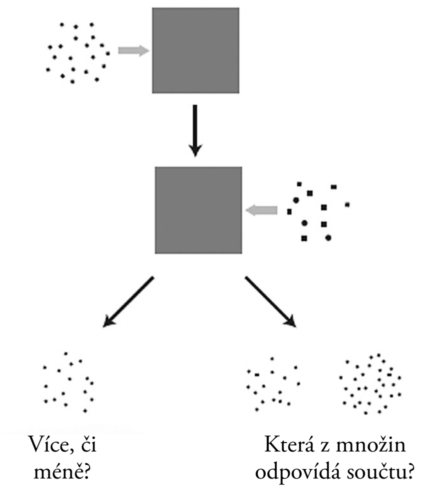
Haist a kol. (2015) na již zmíněném vzorku dospělých, adolescentních a dětských probandů pomocí funkční magnetické rezonance zkoumali, zda úroveň neverbálních matematických kompetencí (tzv. numerozita) předvídá akademickou úspěšnost individua v symbolické matematice. Úroveň neverbálních matematických kompetencí ověřoval na základě přesnosti a rychlosti řešení jednoduchých kognitivních úloh. Z jeho výsledků vyplynulo, že přesnost a reakční čas spolehlivě úspěšnost v symbolické matematice nepředvídají. Zjistil ale, že se s přibývajícím věkem u dětí až do dospělosti průběžně zlepšují jejich neverbální matematické kompetence. Dále našel statisticky významný vztah mezi úspěšností probandů v experimentálních úlohách a předchozím matematickém testu. Probandi úspěšní v matematickém testu vykazovali aktivitu specificky v parietálním laloku a v oblasti IPS. Tato oblast nicméně neposkytla prediktivní hodnotu pro budoucí úspěch v dalším matematickém testování. Nicméně sám autor uvádí, že experimentální úlohy byly pro dospělé probandy možná příliš lehké a tím byla prediktivní hodnota aktivace IPS zkreslena. Zároveň byla během měření funkční magnetickou rezonancí zaznamenána aktivita vizuálního kortexu v oblasti ventrálního proudu, tj. ve stejné oblasti, kterou jsme uváděli v rámci našeho výzkumu výše. Haist zjistil, že aktivita této oblasti predikovala úspěšnost ve školní matematice, a to tak, že čím preciznější vizuální strategie, tím lepší výkony ve formální matematice. Tato data opět naznačují existenci systému vizuálních strategií pro řešení neverbálních matematických úloh.

Zajímavé také je, že u dospělých lidí nebyly vizuální strategie vázány na oblast ventrálního proudu, ale na ventrální okcipitálně-temporální kortex. Okcipitálně-temporální kortex je místo, kde se velmi zjednodušeně nachází mentální reprezentace času a prostoru (Čihák, 1997), což svědčí o vyšší komplexitě a pokročilosti vizuálních strategií. Lze se tudíž domnívat, že mimo ANS existuje jiný systém schopný řešit neverbální matematické úlohy, který využívá vizuální strategie a zároveň je úzce napojený na ontogenezi. Otázkou zůstává, zdali jde skutečně o paralelní systém individualizace. Dále není zcela jasné, zda se daný systém spolu s ANS vzájemně doplňuje, tj. zda propojením funkce okcipitálně-temporálního kortexu s oblastí IPS dochází k vytvoření vyššího celku schopného zpracovávat data o čase, prostoru a číslech, nebo zda je funkce ANS a systému vizuálních strategií oddělená. Do budoucna je potřeba tento vztah prozkoumat a blíže objasnit.

Trénink ANS

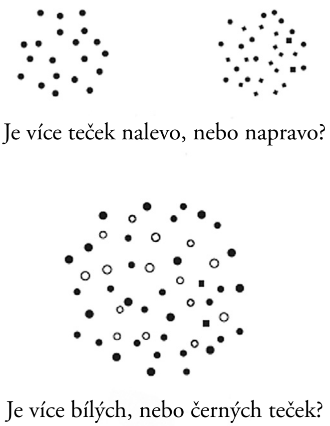
V literatuře patří mezi nejvýznamnější studie na toto téma výzkum Parka a Brannonové (2014). Ti se zabývali možnostmi tréninku ANS pomocí specifického typu jednoduchých kognitivních úloh a podařilo se jim prokázat vztah mezi tréninkem ANS a zlepšením obecných matematických dovedností u dospělých lidí ve věku od 18 do 34 let (N=88).

Pro ilustraci tyto úlohy spočívaly v rychlé (v řádech 1000–1500 ms) prezentaci množin černých teček na bílém pozadí monitoru počítače. Autoři používali dva základní druhy úloh. První skupina úloh (obr. 1) spočívala v jakémsi sčítání množin teček. Probandovi byla nejprve prezentována množina teček, následovalo neutrální šedé pole a po něm další množina teček. V předposledním kroku se buď zobrazila jedna množina teček a proband měl určit, zda je konečná množina větší nebo menší než součet předchozích množin, případně se objevily dvě různé množiny a proband měl určit, která z nich počtem teček lépe odpovídá součtu předchozích množin. Znovu zdůrazňujeme, že prezentace všech množin teček, tj. i těch závěrečných, byla časově omezená (1000–1500 ms), po její prezentaci opět následovalo šedé okno a proband odpovídal, aniž by měl množiny před očima.



Obr. 1. Aproximální aritmetika (upraveno podle Park & Brannon, 2014)

Druhý typ úloh (obr. 2) spočíval v současné prezentaci dvou různých množin a proband měl určit, která množina byla větší. Další variantou byla jedna velká množina obsahující bílé a černé tečky a proband určoval, zda bylo více bílých, nebo černých teček.



Obr. 2. Aproximální porovnání počtu

Výsledky studie poukázaly na statisticky významné zlepšení obecných aritmetických dovedností u dospělých lidí, které bylo ověřeno pomocí standardizovaného matematického testu (metoda test–retest, tj. úroveň matematických schopností byla měřena před experimentem a po něm). Nicméně principy tohoto mechanismu nejsou zdaleka dostatečně popsány a vysvětleny. Kupříkladu u prvního typu úlohy se výzkumníkům podařilo prokázat statisticky významné zlepšení v matematickém testu při použití analýzy rozptylu ANOVA, nicméně při použití již zmíněného Weberova–Fechnerova poměru (w) byl vztah pod hladinou statistické významnosti. Naopak u druhého typu úlohy se statisticky významný vztah mezi tréninkem a matematickými schopnostmi podařilo prokázat pouze pomocí Weberova–Fechnerova poměru (w). Domníváme se proto, že vztah mezi tréninkem těchto kognitivních funkcí a zlepšením obecných matematických dovedností je ovlivněn dalšími faktory. V našem nedávno publikovaném neurovědním výzkumu (Plassová et al., 2016) jsme zjistili, že u druhého typu úlohy (viz obr. 2) hraje významnou roli sama plocha, kterou prvky množiny zaujímají. Je proto potřeba kontrolovat všechny aspekty, které s plochou souvisejí, zejména vizuální strukturu úlohy, hustotu teček a vzdálenost mezi jednotlivými prvky.

Dále je nutné uvést, že existuje velmi omezený počet studií, které se zabývají tréninkem ANS u dětí. Nicméně z dostupných zdrojů (např. Wang et al., 2016; Park et al., 2016) vyplývá, že preciznost ANS koreluje s úrovní obecných matematických dovedností u předškoláků a dále pak, že tréninkem ANS dochází ke zlepšení v symbolické matematice. V našem zmíněném výzkumu (Plassová et al., 2016) se pomocí elektroencefalografu podařilo prokázat, že ANS úlohy, jež jsme navrhli dle laskavě poskytnutých materiálů ze studie Parka a Brannonové (2014), u předškoláků stimulují stejnou neuroanatomickou oblast jako u dospělých, tj. oblast intraparietální brázdy. Nicméně šlo pouze o data z pilotní studie a jejich validita je tím značně omezena.

Nejpalčivějším problémem v současné chvíli stále zůstává správně zvolená metodologie a detailní studium proměnných, které mohou výzkum v oblasti ANS negativně ovlivňovat. Domníváme se, že klíčová je již zmíněná proměnná v podobě plošných aspektů úlohy. Negen a Sarnecka (2015) ve svém výzkumu upozornili na problematiku pochopení termínů „větší“ a „menší“ u předškolních dětí a na vliv velikosti prvků (v jejich případě puntíků) při odhadu počtu. Děti ve věku od 30 do 48 měsíců měly tendenci označovat jako větší tu množinu, která zabrala větší plochu, nikoli tu, která měla větší počet prvků, tj. děti se při odhadu velikosti soustředily pouze na velikost plochy, kterou puntíky zabraly. Jde tak vlastně o klasický problém, na který upozornil již Jean Piaget (1954). Schopnost tranzitivity jako myšlenkové operace připsal až dětem na 1. stupni základní školy.

Vyvstává tak otázka, zda jsou zvolené formulace z lingvistického hlediska správné a pro děti pochopitelné. V našem výzkumu (Plassová et al., 2016) situaci řešíme pomocí konstantní velikosti prvků množiny a použitím Fibonacciho posloupnosti pro umístění prvků do plochy, tj. kontrolujeme hustotu množiny a probandi se rozhodují pouze na základě plochy, kterou jednotlivé prvky zabírají. Ačkoli jsme uvedli, že u našich probandů dochází k aktivaci IPS, nemáme zatím data o tom, zda mají naše úlohy vliv na zlepšení matematických dovedností probandů. Dále také není jasné, existují-li u předškoláků ontogenetická specifika ve funkci ANS. Tyto oblasti je potřeba dále experimentálně prozkoumat.

Možná využití ANS v pedagogice

Možná aplikace v pedagogice, a to již u předškoláků, spočívá zejména v trénování ANS s cílem zlepšit výkon v obecné matematice. V předchozím textu jsme uvedli studie, které tuto možnost experimentálně ověřily (např. Park & Brannon, 2014; Wang et al., 2016; Park et al., 2016). Je však potřeba upřesnit, jak by takový trénink měl vypadat. V současné chvíli existují desítky speciálních aplikací, které slouží k tréninku kognitivních funkcí (např. Lumosity), nicméně jejich efektivita je sporná (např. Owen et al., 2010; Redick et al., 2013). Domníváme se, že je to důsledek špatné konstrukce úloh, které se nedostatečně experimentálně testují, případně se testují pouze behaviorálně, a chybí neuroanatomická data, která by poskytla empirický důkaz o tom, co přesně se během tréninku s mozkem děje.

V předchozí kapitole jsme zmínili, že neuroanatomická oblast intraparietální brázdy odráží interindividuální rozdíly v matematických dovednostech, tj. objem kůry velkého mozku v této oblasti a její neurální aktivita korelují s obecnými matematickými schopnostmi jedince. Narážíme však na problém, že chybí relevantní studie, které by poskytly dostatek informací o neurálních korelátech trénování ANS. V současné chvíli pracujeme na experimentálním ověření neurální aktivity při řešení ANS úloh u předškoláků za pomoci elektroencefalografu (EEG). Výhodou neurozobrazování také je, že získáme informace o tom, zda existuje statisticky významný rozdíl v aktivitě mozku u dětí, které ve standardizovaném matematickém testu skórují nadprůměrně, a dětmi, které skórují podprůměrně. Další výhodou je, že v případě nalezení takové specifické aktivity už od dětí dále nepotřebujeme, aby na úlohy behaviorálně odpovídaly (např. stiskem tlačítka). Po analýze evokovaných potenciálů, tj. změn v elektrické aktivitě mozku na základě působení našeho vizuálního stimulu (ANS úloha), bychom měli být schopni predikovat, jak si dítě povede ve standardizovaném matematickém testu.

Další potřebné informace by poskytlo měření pomocí funkční magnetické rezonance, které by pomohlo zodpovědět otázku, jak pomocí ANS dochází ke zlepšování v symbolické matematice. Domníváme se, že je to způsobené nárůstem synaptických spojů v oblasti intraparietální brázdy, nicméně tuto hypotézu nejsme aktuálně v našich laboratorních podmínkách schopni testovat.

Literatura

Binterová, H., & Hošpesová, A. (2003). Objevování v matematickém vyučování podporované Excelem. *Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep., 10*, 267–273.

Binterová, H., Milota, J., & Vaníček, J. (2005). Global School – virtuální prostředí pro výuku matematiky na ZŠ formou e-learningu. *Univ. S. Boh. Dept. Math. Rep., 13*.

Brannon, E. M. (2006). The representation of numerical magnitude. *Current Opinion in Neurobiology, 16*(2), 222–229.

Brannon E. M., & Terrace H. S. (1998). Ordering of the numerosities 1 to 9 by monkeys. *Science, 282*, 746–749.

Cantlon, J. F., Brannon, E. M., Carter, E. J., & Pelphrey, K. A. (2006). Functional imaging of numerical processing in adults and 4-y-old children. *PLoS Biology, 4*(5), e125.

Castelli, F., Glaser, D. E., & Butterworth, B. (2006). Discrete and analogue quantity processing in the parietal lobe: a functional MRI study. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, 103*, 4693–98.

Castronovo, J., & Gobel, S. M. (2012). Impact of high mathematics education on the number sense. *PLoS ONE, 7*(4), e33832.

Cohen Kadosh R., Cohen Kadosh K., & Henik A. (2008). When brightness counts: the neuronal correlate of numerical luminance interference. *Cerebral Cortex, 18*, 337–343.

Čihák, R. (1997). *Anatomie 3*. Praha: Grada.

Davis, H., & Perusse, R. (1988). Numerical competence in animals: definitional issues, current evidence, and a new research agenda. *Behavioral and Brain Sci*ences, *11*, 561–615.

Dehaene, S. (1999). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. 2. vyd. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., & Changeux, J. P. (1996). Cerebral networks for number processing: Evidence from a case of posterior callosal lesion. *NeuroCase*, 2:155-174.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology, 20*, 487–506.

Dehaene, S., Izard, V., & Piazza, M. (2005). *Control over non-numerical parameters in numerosity experiments*. Dostupné z www.unicog.org/publications/piazza_tuningcurves_neuron2004.pdf

DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2012). Malleability of the approximate number system: Effects of feedback and training. *Frontiers in Human Neuroscience, 6*.

Eger, E., Sterzer, P., Russ, M. O., Giraud, A. L., & Kleinschmidt, A. (2003). A supramodal number representation in human intraparietal cortex. *Neuron 37*, 719–25.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 8*(7), 307–314.

Fuhs, M. W., & McNeil, N. M. (2013). ANS acuity and mathematics ability in preschoolers from low-income homes: Contributions of inhibitory control. *Developmental Science, 16*(1), 136–148.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (2000). Non-verbal numerical cognition: From reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences, 4*(2), 59–65.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Gerstmann, J. (1940*).* Syndrome of finger agnosia, disorientation for right and left, agraphia, acalculia. *Archives of Neurology and Psychology*, 44, 398–408.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2007). Symbolic arithmetic knowledge without instruction. *Nature, 447*, 589–591.

Gilmore, C. K., McCarthy, S. E., & Spelke, E. S. (2010). Non-symbolic arithmetic abilities and mathematics achievement in the first year of formal schooling. *Cognition, 115*, 394–406.

Gobel, S. M., Watson, S. E., Lervag, A., & Hulme, C. (2014). Children's arithmetic development: It is number knowledge, not the approximate number sense, that counts. *Psychological Science, 25*(3), 789–798.

Gordon, P. (2004). Numerical cognition without words: Evidence from Amazonia. *Science 306*, 496–499.

Haist, F., Wazny, J. H., Toomarian, E., & Adamo, M. (2015). Development of brain systems for nonsymbolic numerosity and the relationship to formal math academic achievement. *Human Brain Mapping. 36*, 804–826.

Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the "Number Sense": The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year olds and adults. *Developmental Psychology, 44,* 1457–1465.

Halberda, J., Mazzocco, M. M., & Feigenson, L. (2008). Individual differences in non-verbal number acuity correlate with maths achievement. *Nature 455*, 665– 668.

Halberda, J., Ly, R., Wilmer, J. B., Naiman, D. Q., & Germine, L. (2012). Number sense across the lifespan as revealed by a massive Internetbased sample. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, 109,* 11116–11120.

Hauser, M. D., Carey, S., & Hauser, L. B. (2000). Spontaneous number representation in semifree-ranging rhesus monkeys. *Proceeding of the Royal Society of London B, 267*, 829–33

Henschen, S. E. (1919). Uber Sprach-, Musik- und Rechenmechanismen und ihre Lokalisation im Großhirn. *Zeitshrift für die gesamte neurologie und psychiatry, 52*, 273–298.

Henschen, S. E. (1920). *Klinische und anatomische Beiträge zur Pathologie des Gehirns.* Stockholm: Nordiska Bokhandeln.

Holloway, I. D., & Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*(1), 17–29.

Chochon, F., Cohen, L., van de Moortele, P. F., & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of Cognitive Neuroscience, 11*, 617–630.

Hyde, C. D. (2011). Two Systems of Non-Symbolic Numerical Cognition. *Frontiers in Human Neuroscience, 5*, 150.

Inglis, M., Attridge, N., Batchelor, S., & Gilmore, C. (2011). Non-verbal number acuity correlates with symbolic mathematics achievement: But only in children. *Psychonomic Bulletin and Review, 18*(6), 1222–1229.

Isaacs, E. B., Edmonds, C. J., Lucas, A., & Gadian, D. G. (2001). Calculation difficulties in children of very low birthweight: A neural correlate. *Brain, 124*(Pt 9): 1701–1707.

Izard, V., Dehaene-Lambertz, G., & Dehaene, S. (2008). Distinct cerebral pathways for object identity and number in human infants. *PLoS Biology,* 6, e11.

Izard, V., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 106*(25), 10382–10385.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W, & Volkmann, J. (1949). The discrimination of visual number. *American Journal of Psychology, 62*(4), 498–525.

Kaufmann, L., Vogel, S. E., Starke, M., Kremser, C., Schocke, M., & Wood, G. (2009). Developmental dyscalculia: compensatory mechanisms in left intraparietal regions in response to nonsymbolic magnitudes. *Behavioral and Brain Functions*, 5, 35.

Knops, A., Thirion, B., Hubbard, E. M., Michel, V., & Dehaene, S. (2009). Recruitment of an area involved in eye movements during mental arithmetic. *Science, 324*, 1583–1585.

Libertus, M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2013). Numerical approximation abilities correlate with and predict informal but not formal mathematics abilities. *Journal of Experimental Child Psychology, 116*(4), 829–838.

Libertus, M. E., Odic, D., & Halberda, J. (2012). Intuitive sense of number correlates with math scores on college-entrance examination. *Acta Psychologica, 141*(3), 373–379.

Lewandowsky, M. & Stadelmann, E. (1908). Über einen bemerkenswerten Fall von Hirnblutung und über Rechenstörungen bei Herderkrankung des Gehirns. *Journal für Psychologie und Neurologie, 11*, 249-265.

Luria, A. R. (1973). *The working brain*. New York: Basic Books.

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011a). Impaired acuity of the approximate number system underlies mathematical learning disability (dyscalculia). *Child Development, 82*(4), 1224–1237.

Mazzocco, M. M. M., Feigenson, L., & Halberda, J. (2011b). Preschoolers' precision of the approximate number system predicts later school mathematics performance. *PLoS ONE, 6*(9), 1–8.

McCrink, K., & Wynn, K. (2007). Ratio abstraction by 6-month-old infants. *Psychological Science, 18*, 740–745.

Merritt, D. J, DeWind, N. K., & Brannon, E. M. (2012). Comparative cognition of number representation. In T. R. Zentall & E. A. Wasserman (Eds.), *The oxford handbook of comparative cognition* (s. 451–476). 2. vyd. New York: Oxford University Press.

Mussolin, C., Mejias, S., & Noël, M. P. (2010). Symbolic and nonsymbolic number comparison in children with and without dyscalculia. *Cognition, 115*(1), 10–25.

Negen, J., & Sarnecka, B. W. (2015). Is there really a link between exact-number knowledge and approximate number system acuity in young children? *British Journal of Developmental Psychology, 33*, 92–105.

Nieder, A. (2013). Coding of abstract quantity by 'number neurons' of the primate brain. *Journal of Comparative Physiology A, 199*, 1–16.

Nieder, A. & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain. *Annual Review of Neuroscience, 32*, 185–208.

Owen, A. M., Hampshire, A., Grahn, J. A., Stenton, R., Dajani, S., Burns, A. S., Howard, R. J. & Ballard, G. C. (2010). Putting brain training to the test. *Nature, 465*(7299), 775–778.

Park, J., & Brannon, E. M. (2013). Training the approximate number system improves math proficiency. *Psychological Science, 24,* 2013–2019.

Park, J., Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: an investigation of underlying mechanism. *Cognition, 133*, 188–200.

Park, J., Bermudez, V., Roberts, R. C., & Brannon, E. M. (2016). Non-symbolic approximate arithmetic training improves math performance in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology, 152*(12), 278–293.

Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. New York: Ballentine.

Piazza, M., Izard, V., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2004). Tuning curves for approximate numerosity in the human intraparietal sulcus. *Neuron, 44*(3), 547–555.

Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., et al. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition, 116*(1), 33–41.

Piazza, M., Mechelli, A., Price, C. J., Butterworth, B. (2006). Exact and approximate judgements of visual and auditory numerosity: An fMRI study. *Brain Research, 1106*(1), 177–188.

Pinel, P., Dehaene, S., Riviere, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *Neuroimage, 14*, 1013–1026.

Plassová, M., Tesař, M., Vavrečka, M., & Valuchová, K. (2016). Approximate number system in children. In M. McGreevy & R. Rita (Eds.), *Proceedings of the 6th Biannual CER Comparative European Research Conference* (182–187). London: Science.

Plháková, A. (2009). *Učebnice obecné psychologie*. Praha: Academia.

Price, G. R., Palmer, D., Battista, C., & Ansari, D. (2012). Nonsymbolic numerical magnitude comparison: Reliability and validity of different task variants and outcome measures, and their relationship to arithmetic achievement in adults. *Acta Psychologica, 140*(1), 50–57.

Redick, T. S., Shipstead, Z., Harrison, T. L., Hicks, K. L., Fried, D., Hambrick, D. Z., Kane, M. J. & Engle, R. W. (2013). No evidence of intelligence improvement after working memory training: a randomized, placebo-controlled study. *Journal of Experimental Psychology*, *142*, 359–379.

Roitman, J. D., Brannon, E. M., & Platt, M. L. (2012). Representation of numerosity in posterior parietal cortex. *Frontiers in Integrative Neuroscience, 6*, 25.

Rotzer, S., Kucian, K., Martin, E., von Aster, M., Klaver, P., & Loenneker, T. (2008). Optimized voxel-based morphometry in children with developmental dyscalculia. *Neuroimage, 39*, 417–422.

Rotzer, S., Loenneker, T., Kucian, K., Martin, E., Klaver, P., & von Aster, M. (2009). Dysfunctional neural network of spatial working memory contributes to developmental dyscalculia. *Neuropsychologia*, *47*, 2859–2865.

Rykhlevskaia, E., Uddin, L. Q., Kondos, L., & Menon, V. (2009). Neuroanatomical correlates of developmental dyscalculia: combined evidence from morphometry and tractography. *Frontiers in Human Neuroscience, 3*(51), 1–13.

Samková, L. (2013). Využití programu GeoGebra při nácviku odhadů. *Sborník 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*, s. 323–336.

Sasanguie, D., Defever, E., Maertens, B., & Reynvoet, B. (2013). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergartners. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 1–26.

Sasanguie, D., Gobel, S. M., Moll, K., Smets, K., & Reynvoet, B. (2013). Approximate number sense, symbolic number processing, or number-space mappings: What underlies mathematics achievement? *Journal of Experimental Child Psychology, 114*(3), 418–431.

Schacter, D. L., Gilbert, D. T., & Wegner, D. M. (2010). *Psychology* (2. vyd.). New York: Worth.

Sousa, D. (2010). *Mind, brain, and education: Neuroscience implications for the classroom*. Bloomington, IN: Solution Tree.

Spaepen, E., Coppola, M., Spelke, E. S., Carey, S. E., & Goldin-Meadow, S. (2011). Number without a language model. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the USA, 108*, 3163–3168.

Starkey, P., & Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science, 210*, 1033–1035.

Tibber, M. S., Manasseh, G. S., Clarke, R. C., Gagin, G., Swanbeck, S. N., Butterworth, B., et al. (2013). Sensitivity to numerosity is not a unique visuospatial psychophysical predictor of mathematical ability. *Vision Research, 89*, 1–9.

Xu, F., & Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition, 74*, B1–B11.
Wang, J., Odic, D., Halberda, J. & Feigenson, L. (2016). Changing the precision of preschoolers' approximate number system representations changes their symbolic math performance. *Journal of Experimental Child Psychology*, *147*, 82–99.
Wilson, M. L., Hauser, M. D., & Wrangham, R. W. (2001). Does participation in intergroup conflict depend on numerical assessment, range location, or rank for wild chimpanzees? *Animal Behaviour, 61*, 1203–1216.
Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749–750.

Mgr. Michala Plassová,
Katedra pedagogiky a psychologie, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích;
e-mail: mplassova@pf.jcu.cz

prof. PaedDr. Iva Stuchlíková, CSc.,
Katedra pedagogiky a psychologie, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích;
e-mail:stuchl@pf.jcu.cz

Mgr. Michal Vavrečka, Ph.D.,
Katedra pedagogiky a psychologie, Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích,
e-mail: mvavrecka@pf.jcu.cz

PLASSOVÁ, Michala, STUCHLÍKOVÁ, Iva, VAVREČKA, Michal: Introduction to the Approximal Number System

In the following review study we try to summarise basic findings about the Approximate Number System (ANS) in human beings. We start with the definition of ANS, and describe its basic principles, mechanisms and the neuro-anatomical location of the system. We then go on to identify the intersection between ANS cognitive functions and the basic cognitive functions necessary for the successful mastery of school and pre-school mathematics. We focus primarily on the interaction between ANS and mathematical abilities and devote space to the current controversy in questions of the methodological approach to this interaction. In the text we also present findings from recent studies directed to developing training in ANS with the aim of positively affecting general mathematical abilities. The last section of the study looks at the possibilities for the exploitation of ANS in educational practice, including emphasis on the key mechanisms for its effective integration into practical teaching.

Keywords: *approximate number system, mathematical talent, neuropsychology, intraparietal sulcus, cognition.*